ملاحظة: سنثبت أنه يوجد تقوسات أساسيات (على الأقل) في كل نقطة من نقاط سطح نظامي وفق منحني ما محدد $(du, dv) = (\varphi, \eta)$

الإثبات: بالعودة إلى العلاقة:

(1) $k_n = k(\varphi, \eta) = \dfrac{L\varphi^2 + 2M\varphi\eta + N\eta^2}{E\varphi^2 + 2F\varphi\eta + G\eta^2}$

أي أن:

(2) $(L - kE)\varphi^2 + 2(M - kF)\varphi\eta + (N - kG)\eta^2 = 0$

الآن باشتقاق طرفي العلاقة (2) مرة بالنسبة لـ φ وأخرى بالنسبة لـ η
وباعتبار أن مشتق التقوس وفق المناحي الأساسية
وفق المناحي التي يبلغ التقوس وفقها قيمه القصوى

(3) $(L - kE)\varphi + (M - kF)\eta = 0$

(4) $(M - kF)\varphi + (N - kG)\eta = 0$

حيث k التقوس الأساسي وفق المنحني (φ, η)
إن المعادلتين (3) و (4) جبريتان من الدرجة الأولى بالنسبة لـ φ و η
فإن الشرط اللازم والكافي لوجود حل غير صفري (غير معدوم) لهذه الجملة هو
أن يكون محدد الجملة معدوم:

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0$$

بفك المحدد نحصل على المعادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ k.

$E \quad F \quad G$

$L \quad M \quad N$

(5) $(EG - F^2)k^2 - (EN - 2FM + LG)k + (LN - M^2) = 0$

للمعادلة (5) جذران لأنه يوجد تقوسات أساسيات بالفرض وبالتالي يوجد
جذران للمعادلة، نرمز لهما بالشكل k_1 و k_2

وهنا نميز ما يلي:

1- وإذا كان $k_1 \neq k_2$.
عندئذ يوجد منحنيات أساسيات (φ_1, η_1) و (φ_2, η_2)
تحددهما المعادلتين:

(6) $(L - k_iE)\varphi_i + (M - k_iF)\eta_i = 0$

(7) $(M - k_iF)\varphi_i + (N - k_iG)\eta_i = 0 \quad ; \quad i = 1, 2$

ملاحظة (2): سنثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون مناحي الخطوط الاحداثية موافقة مع المناحي الأساسية هو أن يكون: $F = M = 0$

الإثبات: نفرض أن مناحي الخطوط الاحداثية ولتكن $(\varphi_1, 0)$ و $(0, \eta_2)$ موافقة مع المناحي الأساسية. الآن بالتعويض في المعادلتين (6) و (7) نجد:

Subject: / /

$(\ell_1, 0)$ { $(L - k_1 E)\ell_1 = 0$ $\quad (M - k_1 F)\ell_1 = 0$

$(0, \eta_2)$ { $(M - k_2 F)\eta_1 = 0$ $\quad (N - k_2 G)\eta_1 = 0$

(8) $(L - k_1 E) = 0$ $\quad (M - k_1 F) = 0$

(9) $(M - k_2 F) = 0$ $\quad (N - k_2 G) = 0$

الآن باعتبار أن $0 \neq k_1 \neq k_2$ من المعادلتين (2) و(3)

من الجملة (8) و(9) نستنتج أن $M = F = 0$

- الآن بفرض $F = M = 0$ ، بالعودة إلى (6) و(7) نجد أن:

$(L - k_1 E)\ell_1 = 0 \Rightarrow \ell_1 = 0 \Rightarrow (0, \eta_1)$

$(N - k_1 G)\eta_1 = 0 \Rightarrow \eta_1 = 0 \Rightarrow (\ell_1, 0)$

أي أنه منحنيات مساري تكون إحداثياته متوافقة مع المناحي الأساسية (ق ح).

(2) إذا كان $k_1 = k_2 = k$

مبرهنة: أي منحني سطح في نقطة ما منه هو منحني أساسي.

الإثبات: باعتبار أنه يوجد دوماً في كل نقطة من نقاط سطح نظامي ودومنه أي منحني تقوسات أساسيات بالتالي يكون كلا المعادلتين (6) و(7) حلاً مستقلاً مثلاً أي أنه تتحقق الجملة:

$$(L - kE)\ell + (M - kF)\eta = 0$$
$$(M - kF)\ell + (N - kG)\eta = 0$$

وذلك مهما يكن المنحى (ℓ, η) وذلك يتحقق إذا كان:

$$L - kE = 0 \Rightarrow L = kE$$
$$N - kG = 0 \Rightarrow N = kG$$
$$M - kF = 0 \Rightarrow M = kF$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد أن:

$$k_n = \frac{k(E\ell^2 + 2F\ell\eta + G\eta^2)}{E\ell^2 + 2F\ell\eta + G\eta^2}$$

$$k_n = k = \text{Const}$$

أي أن التقوس الناظمي ثابت وهذه أي منحني (طبعاً في نقطة محددة) و بالتالي أي منحني هو منحني أساسي.

تعريف: نسمي نقطة من السطح والتي فيها أي منحني هو منحني أساسي (التقوس الناظمي ثابت) نقطة مركزية إذا كان: $k_n = k > 0$

مثال على ذلك سطح الكرة

. نقطة مستوية إذا كان $k_n = k = 0$ ، مثال على ذلك السطح المستوي).

خطوط التقوس: خط التقوس على سطح نظامي هو منحنى مماسه في كل نقطة من نقاطه هو منحنى أساسي.

لنجد المعادلة التفاضلية لخطوط التقوس:

نفرض الآن (du, dv) منحنى مماس السطح S في نقطة محددة منه.
إن الشرط اللازم والكافي كي يكون هذا المنحنى أساسي هو أن تتحقق الجملة

(10) $(L-kE)\,du + (M-kF)\,dv = 0$

(11) $(M-kF)\,du + (N-kG)\,dv = 0$

حيث k تقوس المقطع الناظمي وفق المنحنى (du, dv)

$$k_n = k\cos\theta = k$$

الآن بحذف k من المعادلتين (10) و(11) نحصل على المعادلة:

(12) $(LF-ME)\,du^2 + (LG-NE)\,du\,dv + (MG-NF)\,dv^2 = 0$

والتي تكتب بالشكل المحدد الآتي:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

بمكاملة المعادلة (12) بالنسبة لـ u و v نحصل على خط التقوس
نحصل على علاقة بين u و v بالتعويض في معادلة السطح نجد الخط المطلوب

التقوس الوسطي والتقوس التام أو الكلي أو تقوس غاوس

ليكن k_1، k_2 التقوسين الأساسيين للسطح S في نقطة ما منه
نسمي نصف مجموع التقوسين بالتقوس الوسطي ونرمز له بـ H أي:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

ونسمي جداء التقوسين بالتقوس التام ونرمز له بـ K أي:

$$K = k_1 \times k_2$$

واستناداً إلى المعادلة:

$$(EG-F^2)k^2 - (EN-2FM+GL)k + LN - M^2 = 0$$

(13) $H = \dfrac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$ مجموع الجذرين $= \dfrac{-b}{2a}$

جداء الجذرين $= \dfrac{c}{a}$

(14) $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$

ملاحظة من (14) نجد أن: $K > 0$ في النقاط الناقصية

$K < 0$ في النقاط الزائدية

$K = 0$ في النقاط المكافئية أو السوية

مثال: بالعودة إلى نقاط سطح الكرة وجدنا أنّ:

$E = b^2 \;,\; F = 0 \;,\; G = (a + b\sin u)^2$

$L = -b \;,\; M = 0 \;,\; N = -(a + b\sin u)\sin u$

وبالتالي معادلة التقوسات الأساسية

$$b^2 (a + b\sin u)^2 k^2 + [b(a + b\sin u)^2 + b^2(a + b\sin u)\sin u]k + b(a + b\sin u)\sin u = 0$$

نلاحظ أنّ حل المعادلة يستغرق وقتاً لكن نلاحظ معاملات الصيغة I و II أنّ $M = F = 0$ وبالتالي يكون:

$$k_1 = \frac{L}{E} = \frac{-1}{b}$$

$$k_2 = \frac{N}{G} = -\frac{\sin u}{a + b\sin u}$$

حيث وجدنا أنّ $L = kE$ و $N = kG$

k_1: التقوس الأول ثابت وهو يتوافق مع تقوس الدائرة المولدة

المنحني المقارب: تعريف: نسمي منحنٍ ما (du , dv) منحنٍ مقارب على السطح S في نقطة ما منه إذا كان التقوس الناظمي وفقه معدوم.

أي إذا تحقق الشرط: $k_n = k(du , dv) = 0$

من هنا وباعتبار أنّ: $k_n = \frac{II}{I}$

ينتج أنّ: $L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$

من هنا نستنتج ما يلي:

- في النقاط الناقصية $(LN - M^2) > 0$ ⇐ مميز المعادلة سالب
  لا توجد مناحي مقاربة (يتحقق على سطح الكرة)
- في النقاط الزائدية $(LN - M^2) < 0$ يوجد منحنيات مقاربات
- في النقاط السوية: كل منحنٍ مماس هو منحنٍ مقارب (نقاط المستوي).
- في النقاط المكافئية: يوجد منحنٍ مقارب واحد

تعريف الخط المقارب: الخط المقارب هو منحنٍ على السطح مماسه في كل نقطة من نقاطه هو منحنٍ مقارب.

وبالتالي الشرط اللازم والكافي كي يكون المنحني γ مقارب على السطح S هو أن تتحقق المعادلة $II = 0$

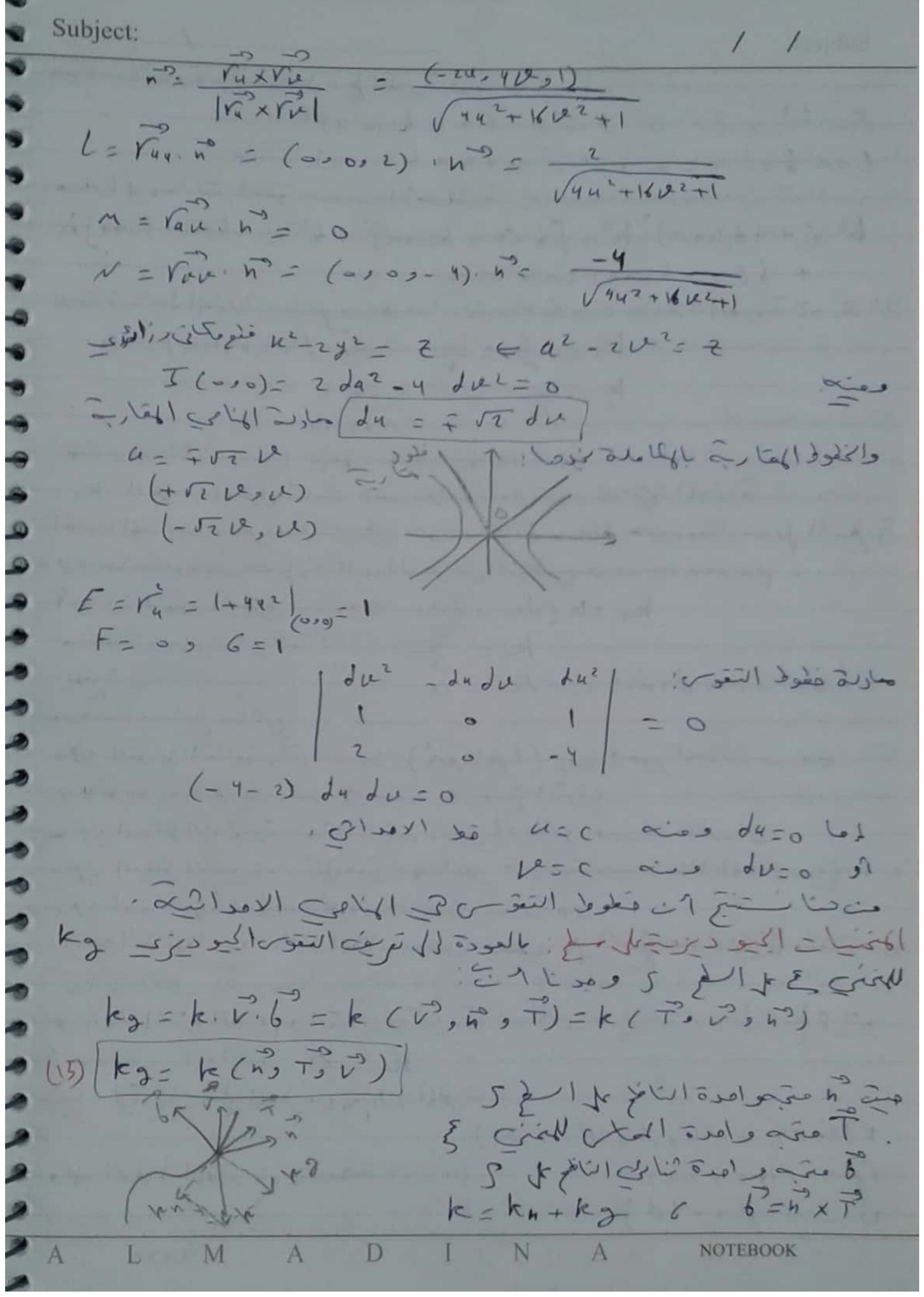
مثال: ليكن السطح المعطى بالمعادلة المتجهة:

$r(u , v) = (u , v , u^2 - 2v^2)$

ولنجد الخطوط المقاربة في نقطة $(0 , 0)$

$\vec{r}_u = (1 , 0 , 2u)$

$\vec{r}_v = (0 , 1 , -4v)$



$\vec{n} = \dfrac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|} = \dfrac{(-2u, 4v, 1)}{\sqrt{4u^2+16v^2+1}}$

$L = \vec{r_{uu}} \cdot \vec{n} = (0, 0, 2) \cdot \vec{n} = \dfrac{2}{\sqrt{4u^2+16v^2+1}}$

$M = \vec{r_{uv}} \cdot \vec{n} = 0$

$N = \vec{r_{vv}} \cdot \vec{n} = (0, 0, -4) \cdot \vec{n} = \dfrac{-4}{\sqrt{4u^2+16v^2+1}}$

فهو مكافئ زائدي $x^2 - 2y^2 = z \Leftarrow u^2 - 2v^2 = z$

ومنه $II(0,0) = 2du^2 - 4dv^2 = 0$

معادلة المناحي المقاربة $du = \mp\sqrt{2}\, dv$

$u = \mp\sqrt{2}\, v$

$(+\sqrt{2}\, v, v)$

$(-\sqrt{2}\, v, v)$

والخطوط المقاربة بالعلاقة نحوها:

$E = r_u^2 = 1 + 4u^2 \big|_{(0,0)} = 1$

$F = 0 , \quad G = 1$

معادلة خطوط التقوس:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$(-4-2)\, du\, dv = 0$

إما $du = 0$ ومنه $u = c$ قطع الاحداثي،

أو $dv = 0$ ومنه $v = c$

من هنا نستنتج أن خطوط التقوس هي المناحي الاحداثية.

المنحنيات الجيوديزية على سطح: بالعودة إلى تعريف التقوس الجيوديزي k_g

للمنحني C على السطح S وجدنا أن:

$k_g = k \cdot \vec{v} \cdot \vec{b} = k(\vec{v}, \vec{n}, \vec{T}) = k(\vec{T}, \vec{v}, \vec{n})$

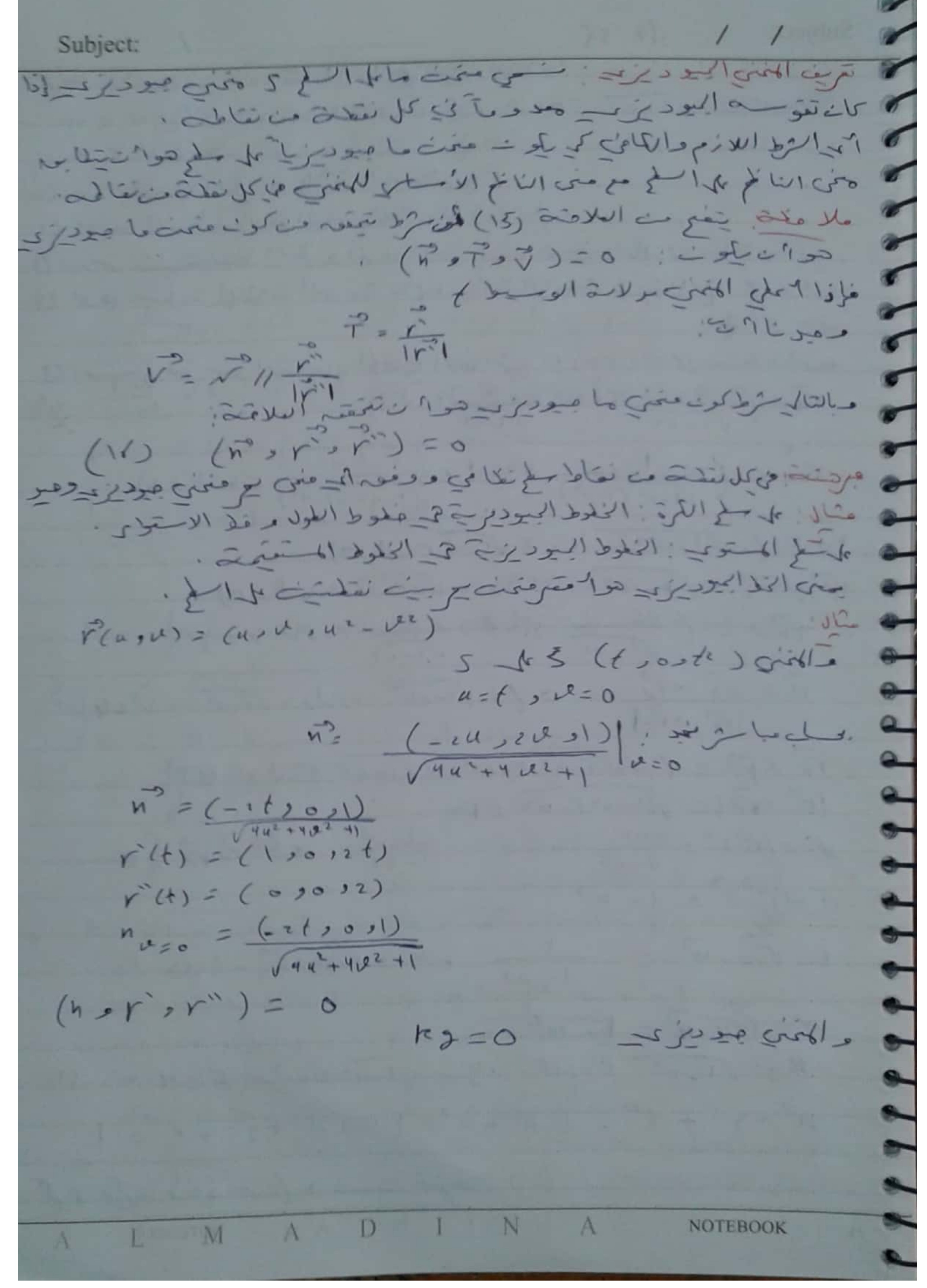
(15) $k_g = k(\vec{n}, \vec{T}, \vec{v})$

حيث $\vec{n}$ متجه واحدة الناظم على السطح S

$\vec{T}$ متجه واحدة المماس للمنحني C

$\vec{b}$ متجه واحدة ثنائي الناظم على S

$k = k_n + k_g \quad , \quad \vec{b} = \vec{n} \times \vec{T}$



تعريف المنحني الجيوديزي: نسمي منحنٍ ما على السطح S منحني جيوديزي إذا كان تقوسه الجيوديزي معدوماً في كل نقطة من نقاطه.

أي أن الشرط اللازم والكافي كي يكون منحنٍ ما جيوديزياً على سطح هو أن يتطابق منحى الناظم على السطح مع منحى الناظم الأساسي للمنحني في كل نقطة من نقاطه.

ملاحظة: ينتج من العلاقة (١٥) أن شرط تحقق من كون منحنٍ ما جيوديزي هو أن يكون: $(\vec{n}, \vec{T}, \vec{V}) = 0$.

فإذا أعطي المنحني بدلالة الوسيط t ووجدنا أن:

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}$$

$$\vec{V} = \vec{N} \parallel \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|}$$

وبالتالي شرط كون منحنٍ ما جيوديزي هو أن تتحقق العلاقة:

$$(\vec{n}, \vec{r}', \vec{r}'') = 0 \qquad (١٧)$$

مبرهنة: في كل نقطة من نقاط سطح نظامي ووفق أي منحى يمر منحني جيوديزي وحيد.

مثال: على سطح الكرة: الخطوط الجيوديزية هي خطوط الطول وخط الاستواء.

على سطح المستوي: الخطوط الجيوديزية هي الخطوط المستقيمة.

يمثل الخط الجيوديزي هو أقصر منحنٍ يمر بين نقطتين على السطح.

مثال:

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$$

هل المنحني $(t, 0, t^2)$ جيوديزي على S

$$u = t, \quad v = 0$$

بحساب مباشر نجد:

$$\vec{n} = \frac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\Big|_{v=0}$$

$$\vec{n} = \frac{(-2t, 0, 1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$

$$r'(t) = (1, 0, 2t)$$

$$r''(t) = (0, 0, 2)$$

$$n_{v=0} = \frac{(-2t, 0, 1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$

$$(n, r', r'') = 0$$

$k_g = 0$ والمنحني جيوديزي.